

Drie keer over de lijn

Voor $x \geq 0$ en $a > 1\frac{1}{2}$ wordt de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = |a - x^2| \cdot x + 3x$$

De grafiek van f_a heeft een knik met x -coördinaat $\sqrt{a}$. Deze knik verdeelt de grafiek van f_a in twee delen. Links van deze knik bevindt zich een top van de grafiek van f_a .

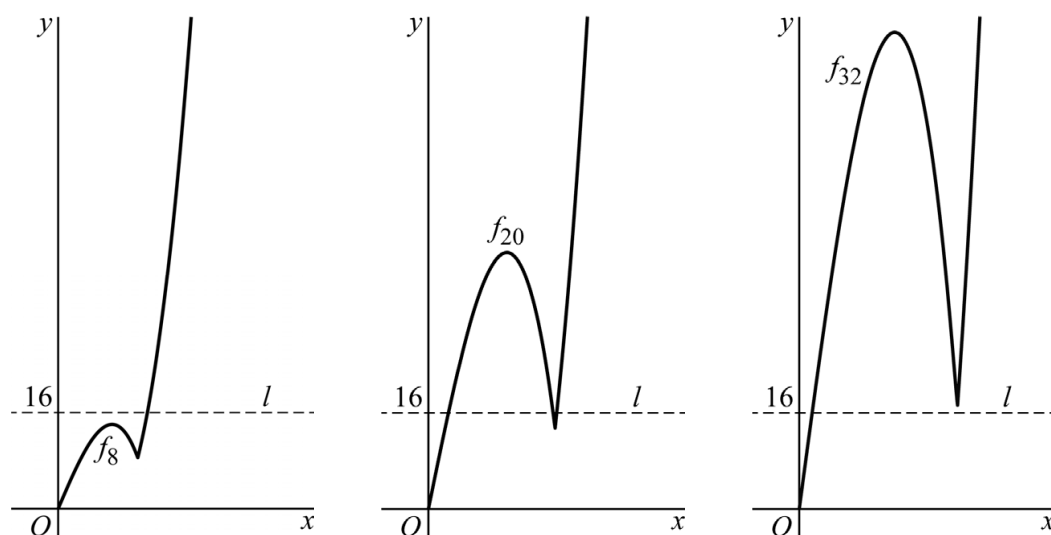
De y -coördinaat van deze top is te schrijven als:

$$y_{top} = 2\left(\frac{1}{3}a + 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1}$$

5p 14 Bewijs dit.

In de figuur zijn de grafieken van f_8 , f_{20} en f_{32} en de lijn l met vergelijking $y = 16$ weergegeven.

figuur



Als a toeneemt, neemt de y -coördinaat $2\left(\frac{1}{3}a + 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1}$ van de top toe.

Ook de y -coördinaat $f_a(\sqrt{a})$ van de knik neemt dan toe.

Het aantal gemeenschappelijke punten van de grafiek van f_a en lijn l hangt af van deze y -coördinaten. Zo snijden de grafiek van f_8 en lijn l elkaar in één punt. De grafiek van f_{20} snijdt lijn l in drie punten en de grafiek van f_{32} snijdt lijn l in één punt.

De waarden van a waarvoor de grafiek van f_a en lijn l drie snijpunten hebben, vormen een interval.

5p 15 Bereken exact dit interval.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.